

УДК 21474(44.29.31)

Т.Т. Дузбаев<sup>1</sup>, Н. Тасболатулы<sup>1</sup><sup>1</sup>КазНУ им. аль-Фараби, <sup>2</sup>Институт информационных и вычислительных технологий, <sup>1,2</sup> Алматы, Республика Казахстан

## МНОГОМАШИНАЯ СИСТЕМА «СИНХРОННЫЙ ГЕНЕРАТОР – ПАРОВАЯ ТУРБИНА»

**Аннотация.** В данной статье рассмотрены проблемы управления многомерными фазовыми системами описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями. Данные математические модели описывают процессы в сложных системах, состоящие из многих турбин и генераторов, и используются для их анализа. Актуальность данных моделей состоит в том, что они позволяют симулировать разные доаварийные, аварийные и послеаварийные ситуации.

Управляемость рассматриваемой модели определяется исследованием глобальной асимптотической устойчивости динамической системы цилиндрических фазовых системах. Полученные результаты демонстрируются численным примером.

**Ключевые слова:** фазовая система, синхронный генератор, паровая турбина, численный расчет, метод Эйлера.

Рассмотрим упрощенную модель системы «синхронный генератор – паровая турбина», описываемую дифференциальными уравнениями вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_i}{dt} &= S_i \\ T_{ji} \frac{dS_i}{dt} &= P_{Ti} - K_i S_i - \left[ \frac{E^2}{z_{11}} \sin \alpha_{11i} + \frac{EU_i}{z_{12}} \sin(\delta_i - \alpha_{12i}) \right], \\ T_{Pi} \frac{dP_{Ti}}{dt} &= -P_{Ti} + \rho_{0i} P_{0i} - \frac{P_{0i}}{\sigma_{0i}} S_i + u. \end{aligned} \quad (1)$$

для двухмашинного случая.

$P_{Ti}$  – мощность паровой турбины;  $T_{Pi}$  – постоянная времени такта регулирования паровой турбины;  $\rho_{0i}, P_{0i}$  – заданные постоянные величины;  $\sigma_{0i}$  – статизм АРЧВ (автоматического регулятора частоты вращения);  $\delta_i$  – угол ЭДС генератора;  $S_i$  – скольжение генератора;  $T_i$  – постоянная инерции движущихся масс;  $K_i > 0$  – коэффициент демпфирования;  $E_i$  – расчетная ЭДС генератора;

$U_i$  – напряжение на шинах бесконечной мощности;  $z_{11i}$  – собственное сопротивление генератора;  $z_{12i}$  – взаимное сопротивление между генератором и шинами;  $\alpha_{11i}$  – дополнительный угол собственного сопротивления;  $\alpha_{12i}$  – дополнительный угол взаимного сопротивления.

Пусть заданы следующие параметры системы регулирования паровой турбины:  $T_p = 251.2$ ,  $\rho_0 = 0.994$ ,  $P_0 = 10420$ ,  $\sigma_0 = 0.06$ . Осуществляя перенос начала координат в положение равновесия  $(\sigma, S, P_T) = (0.686, 0, 10357.48)$ , перейдем к системе уравнений возмущенного движения:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_1}{dt} &= S_1, & \frac{d\delta_2}{dt} &= S_2 \\ \frac{dS_1}{dt} &= C_1 P_1 - K_1 S_1 - \bar{f}_1(\delta_1), & \frac{dS_2}{dt} &= C_2 P_2 - K_2 S_2 - \bar{f}_2(\delta_2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\bar{A}_1 P_1 + u_1, \quad \frac{dP_2}{dt} = -\bar{A}_2 P_2 + u_2.$$

где  $C_1 = 4.167 * 10^{-8}$ ,  $C_2 = 4.167 * 10^{-8}$ ,  $K_1 = 66.7 * 10^{-4}$ ,  $K_2 = 66.7 * 10^{-4}$ ,  
 $f_0 = 1.513 * 10^{-4}$ ,  $\theta_0 = 0.3562$ ,  $A_1 = 39.81 * 10^{-4}$ ,  $A_2 = 39.81 * 10^{-4}$ ,  
 $f_i(\delta_i) = f_0 [\sin(\delta_i + \theta_0) - \sin \theta_0]$ .

Систему (2) можно переписать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + f(t, u, x), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0.$$

где

$$A(t) = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -K & C \\ 0 & 0 & \bar{A} \end{bmatrix}, \quad B(t) = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) \\ S(t) \\ P_T(t) \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{f}(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Так как} \quad |\bar{f}(\delta') - \bar{f}(\delta'')| - f_0 |\sin(\delta' + \theta_0) - \sin(\delta'' + \theta_0)| \leq f_0 |\delta' - \delta''|, \quad (3)$$

то функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(t, u^1, x^1) - f(t, u^2, x^2)| \leq L_1 |u^1 - u^2| + L_2 |x^1 - x^2|, \quad (\forall u^1, u^2 \in \Omega \subseteq R^r, \forall x^1, x^2 \in G \subseteq R^n),$$

где  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 2f_0$ . Линейная стационарная система:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + Bv, \quad t \in [t_0, t_1], \quad y(t_0) = x_0, \quad (y \in R^n, v \in R^r) \quad (4)$$

полностью управляема так как ранг матрицы Калмана

$$U = (B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & C & -\bar{A}C \\ 1 & -\bar{A} & \bar{A}^2 \end{pmatrix} \text{ равна 3.}$$

Вычислим фундаментальную матрицу (4). Характеристическая матрица  $\lambda E_3 - A$  будет равна:

$$\lambda E_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + K & -C \\ 0 & 0 & \lambda + \bar{A} \end{pmatrix} \text{ и характеристический определитель:}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E_3 - A) = \lambda(\lambda + K)(\lambda + \bar{A}).$$

Присоединенная матрица к матрице  $\lambda E_3 - A$  имеет вид:

$$ad_j(\lambda E_3 - A) = \begin{pmatrix} (\lambda + K)(\lambda + \bar{A}) & \lambda + \bar{A} & C \\ 0 & \lambda(\lambda + \bar{A}) & C\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + K) \end{pmatrix}$$

Общий наибольший делитель элементов присоединенной матрицы:

$$D_2(\lambda) = 1.$$

Минимальный полином матрицы  $A$  будет следующим:

$$\psi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{D_2(\lambda)} = \lambda(\lambda + K)(\lambda + \bar{A}).$$

Значения функции  $e^{\lambda t}$  на спектре матрицы  $A$  будут

$$(e^{\lambda t})_{\lambda=0} = 1, (e^{\lambda t})_{\lambda=-K} = e^{-Kt}, (e^{\lambda t})_{\lambda=-\bar{A}} = e^{-\bar{A}t}.$$

Интерполяционные условия имеют следующий вид:

$$r(\lambda_1) = 1, r(\lambda_2) = e^{-Kt}, r(\lambda_3) = e^{-\bar{A}t}$$

где  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -K$ ,  $\lambda_3 = -\bar{A}$  – корни характеристического уравнения  $\det(\lambda E_3 - A) = 0$ .

Так как для рассматриваемой матрицы  $A$ :

$$\psi_1(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = (\lambda + K)(\lambda + \bar{A}),$$

$$\psi_2(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} = \lambda(\lambda + \bar{A}),$$

$$\psi_3(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - \lambda_3} = \lambda(\lambda + K),$$

То интерполяционный полином Лагранжа-Сильвестра [4] имеет вид

$$r(\lambda) = \left( \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda + K)(\lambda + \bar{A})} \right)_{\lambda=0} (\lambda + K)(\lambda + \bar{A}) + \left( \frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\lambda + \bar{A})} \right)_{\lambda=-K} \lambda(\lambda + \bar{A}) + \left( \frac{e^{\lambda t}}{\lambda(\lambda + K)} \right)_{\lambda=-\bar{A}} \lambda(\lambda + K) = 1 + \beta_1(t)\lambda + \beta_2(t)\lambda^2$$

где

$$\beta_1(t) = \frac{K + \bar{A}}{K\bar{A}} - \frac{\bar{A}e^{-Kt}}{K(\bar{A} - K)} - \frac{Ke^{-\bar{A}t}}{\bar{A}(K - \bar{A})}, \quad \beta_2(t) = \frac{1}{K\bar{A}} - \frac{e^{-Kt}}{K(\bar{A} - K)} - \frac{e^{-\bar{A}t}}{\bar{A}(K - \bar{A})}.$$

Следовательно,

$$e^{At} = E_3 + \beta_1(t)A + \beta_2(t)A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 - K\beta_2 & \beta_2 C \\ 0 & 1 - K\beta_1 + K^2\beta_2 & \beta_2 C - \bar{A}C\beta_2 \\ 0 & 0 & 1 - \bar{A}\beta_1 + \bar{A}^2\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\beta_1 - K\beta_2 = \frac{\bar{A}}{K\bar{A}} - \frac{\bar{A}e^{-Kt}}{K(\bar{A} - K)} + \frac{e^{-Kt}}{\bar{A} - K} = \frac{1}{K}(1 - e^{-Kt}),$$

$$(\beta_1 - \bar{A}\beta_2)C = \frac{C}{\bar{A}}(1 - e^{-\bar{A}t}), \quad 1 - K\beta_1 + K^2\beta_2 = e^{-Kt}, \quad 1 - \bar{A}\beta_1 + \bar{A}^2\beta_2 = e^{-\bar{A}t}.$$

Тогда окончательно имеем:

$$\theta(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{K}(1 - e^{-Kt}) & r_0 - r_1 e^{-Kt} + r_2 e^{-\bar{A}t} \\ 0 & e^{-Kt} & \frac{C}{\bar{A}}(1 - e^{-\bar{A}t}) \\ 0 & 0 & e^{-\bar{A}t} \end{pmatrix}.$$

Где

$$r_0 = \frac{C}{K\bar{A}}, \quad r_1 = \frac{C}{K(\bar{A} - K)}, \quad r_2 = \frac{C}{\bar{A}(\bar{A} - K)}.$$

Если  $t_0 = 0$ , то:  $\Phi(t, t_0) = \theta(t)$ ,  $\Phi(t_0, t) = \theta^{-1}(t)$ ,  $\theta(t_0) = E_3$ ,  $\theta^{-1}(t_0) = E_3$  и

$$W(0, t) = \int_0^t e^{A(t-r)} BB^* e^{A^*(t-r)} dr, \quad W(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-r)} BB^* e^{A^*(t_1-r)} dr.$$

Нетрудно вычислить также обратную матрицу  $\theta^{-1}(t)$ :

$$\theta^{-1}(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{K}(1 - e^{Kt}) & l_1(e^{\bar{\lambda}t} - e^{Kt}) - l_2 e^{\bar{A}t} + r_1 e^{\lambda_2 t} + l_3 \\ 0 & e^{Kt} & l_4(e^{Kt} - e^{\bar{\lambda}t}) \\ 0 & 0 & e^{-\bar{A}t} \end{pmatrix}.$$

где

$$l_1 = \frac{C}{K\bar{A}}, \quad l_2 = r_0 + l_1, \quad l_3 = l_1 - r_2, \quad \bar{\lambda}_1 = K + \bar{A}, \quad l_4 = \frac{C}{\bar{A}}.$$

Для исследования полученных результатов была создана программа. В программе для численного дифференцирования использовался модифицированный метод Эйлера. Данный метод состоит из двух частей:

Предиктор:

$$\tilde{y}_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Корректор:

$$y_i = y_{i-1} + h \frac{f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, \tilde{y}_i)}{2}.$$

В нашем случае уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_i &= \delta_{i-1} + hf(\delta_{i-1}), \\ \delta_i &= \delta_{i-1} + h \frac{f(\delta_{i-1}) + f(\tilde{\delta}_i)}{2}, \\ \tilde{S}_i &= S_{i-1} + hf(\delta_{i-1}, S_{i-1}, P_{i-1}), \\ S_i &= S_{i-1} + h \frac{f(\delta_{i-1}, S_{i-1}, P_{i-1}) + f(\tilde{\delta}_i, \tilde{S}_i, \tilde{P}_i)}{2}, \\ \tilde{P}_i &= P_{i-1} + hf(P_{i-1}), \\ P_i &= P_{i-1} + h \frac{f(P_{i-1}) + f(\tilde{P}_i)}{2}. \end{aligned}$$

Результаты численного дифференцирования системы (2) приведены ниже:

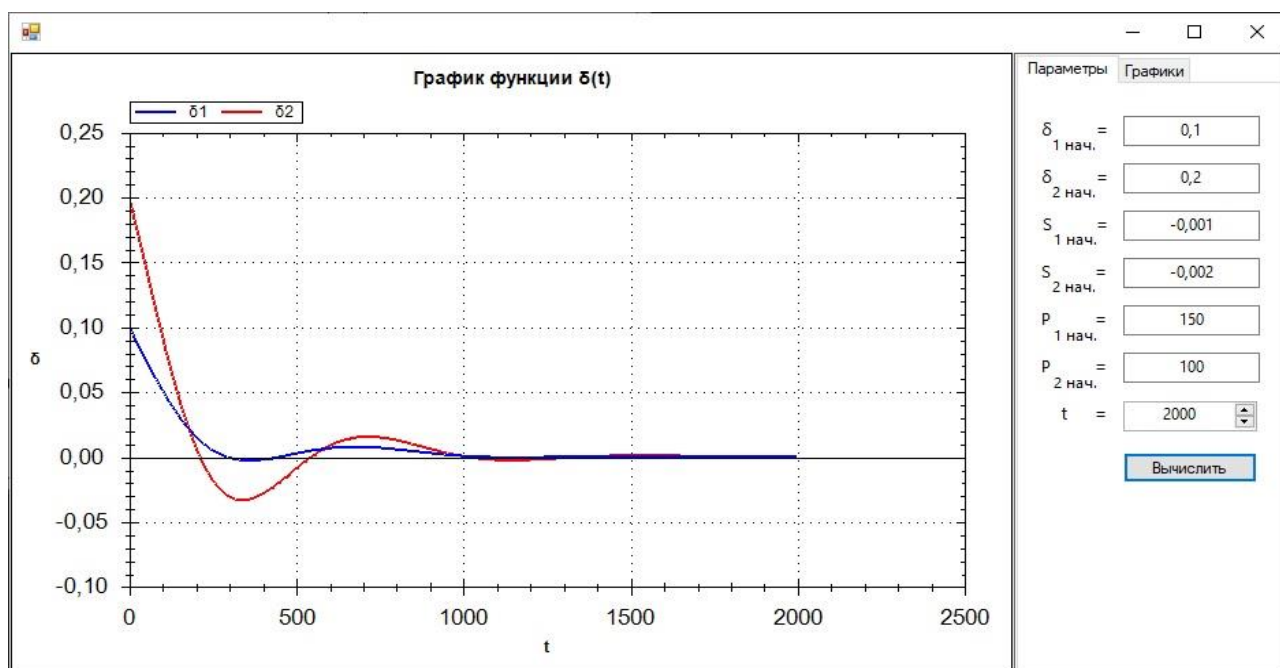
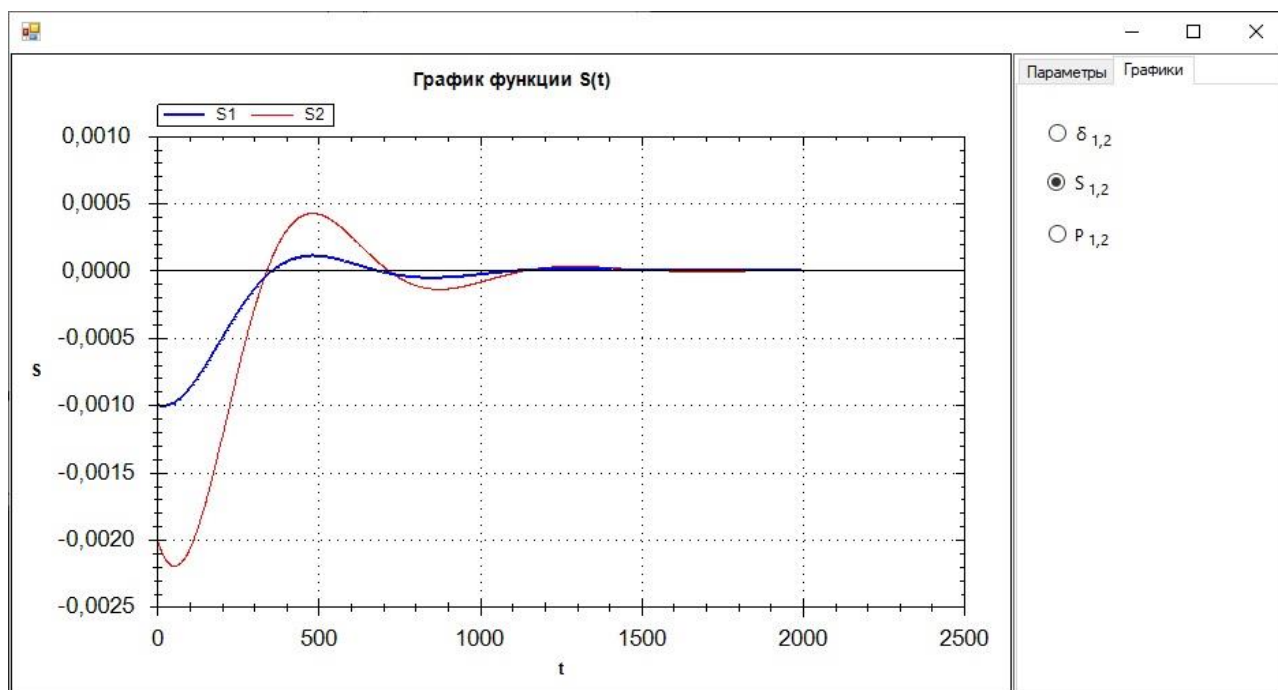
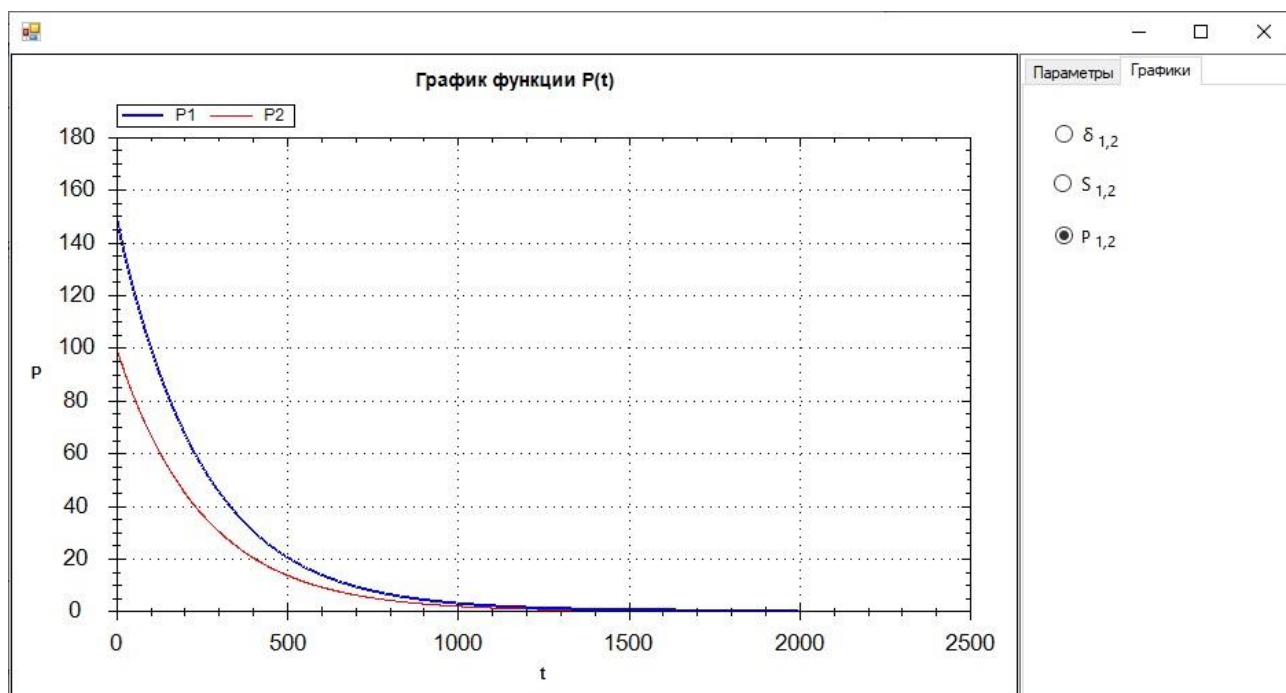


Рис. 1 – График функции  $\delta_1(t)$ ,  $\delta_2(t)$ .

Рис. 2 – График функции  $S_1(t), S_2(t)$ .

Как видно из графиков, систему можно привести из возмущенного состояния в исходное состояние с помощью управления. Найденное управление обеспечивает управляемость системы. В нашем случае система состоит из двух машин. Но данный метод применим и для систем, состоящих из более двух машин.

Рис. 3 – График функции  $P_1(t), P_2(t)$ .

**Литература:**

1. Калимолдаев М.Н. Устойчивость и математическое моделирование нелинейных многомерных фазовых систем. – Бишкек, 2000.
2. Калимолдаев М.Н. Исследование динамики многомерных фазовых систем. – Алма-Ата, 1990.
3. Ahmetzhanov M.A., Duzbaev T.T. The «synchronous generator-steam turbine»// The 12<sup>th</sup> International Scientific Conference «Informational technologies and management» ITU. – Almaty, 16-17 April, 2014.
4. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление: учеб. пособие. – М.: Наука, 1978. – 552 с.

Бұл мақалада біз сызықты емес дифференциалдық теңдеулермен берілген көп өлшемді фазалық жүйені басқару мәселесін қарастырамыз. Бұл математикалық модельдер турбиналар мен генераторлар саны көп болатын күрделі энергетикалық жүйелердегі процестерді сипаттайды және оларды талдау үшін пайдаланылады. Бұл модельдердің маңыздылығы электр энергиясы жүйелеріндегі апаттан бұрынғы, апатты жағдай кезіндегі және апаттан кейінгі түрлі жағдайларды иммитациялаудан тұрады.

Зерттелетін модельдің басқарылуы динамикалық жүйелердің цилиндрлік фазалық кеңістіктегі ауқымды асимптотикалық орнықтылығын зерттеу арқылы анықталды. Нәтижесінде, басқару зерттелетін фазалық жүйеге басқарылу қабілетін қамтамасыз ететін синтез түрінде құрылады. Алынған нәтижелер сандық мысалдар түрінде суреттеледі.

**Түйін сөздер:** фазалық жүйе, синхронды генератор, бу турбинасы, сандық есеп, Эйлер әдісі.

*In this article, we will consider the problems of controlling multidimensional phase systems described by nonlinear differential equations. These mathematical models describe processes in complex systems consisting of many turbines and generators and are used for their analysis. The relevance of these models lies in the fact that they allow simulating different pre-emergency, emergency and post-emergency situations.*

*The controllability of the model under consideration is determined by studying the global asymptotic stability of dynamical systems in cylindrical phase systems. The results obtained are demonstrated by a numerical example.*

**Keywords:** phase system, synchronous generator, steam turbine, numerical calculation, Euler's method.